ПОЧАТКИ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ

1. Класична ймовірність. Використання формул комбінаторики для обчислення ймовірностей

Стислі теоретичні відомості

Випадкові події

Явище називається випадковим, якщо його результат неможливо передбачити.

Наприклад, при підкиданні монети невідомо, який бік монети опиниться зверху — «цифра» чи «герб». Так само неможливо передбачити результати при грі в рулетку, при участі в тиражі лотереї, при стрілянні в мішень тощо.

Проте при багаторазових, масових повтореннях існують закономірності, які простежити можна.

Теорія ймовірностей вивчає закономірності масових випадкових подій.

Подія — це одне з математичних понять, які приймаються без визначення (такі, наприклад, як пряма, точка і площина). Події позначаються великими буквами латинського алфавіту A, B і т. д.

Будь-яка подія відбувається внаслідок випробування.

Під випробуванням розуміють ті умови, у результаті яких відбувається подія. Наприклад, підкидання монети — випробування, випадання на монеті цифри — подія, стрільба по мішені — випробування, влучення у мішень або промах — події.

Випуск тиражу лотереї — випробування, виграш за квитком — подія.

- ***Випадковою*** подією називається подія, яка може відбутися або не відбутися в результаті випробування.
- Події A і B називаються ***несумісними*** в певному випробуванні, якщо вони не можуть відбутися одночасно.

Наприклад, при одному пострілі може статися або влучення, або промах, але одночасно ці дві події відбутися не можуть.

Події $A_1, A_2, \ldots, A_n$ можуть бути ***рівноможливими***. Наприклад, при киданні грального кубика випадання на верхній грані кубика цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6 (які визначають кількість очок, що випали) рівноможливе.

- ***Вірогідною*** називається така подія, яка при певному випробуванні обов'язково відбудеться.
- ***Неможливою*** називається така подія, яка при певному випробуванні відбутися не може.

Наприклад, при киданні грального кубика випадання цифр від 1 до 6 — подія вірогідна, а цифри 7 — неможлива.

Класична ймовірність

Назвемо результат випробування сприятливим події A, якщо його настання внаслідок досліду приводить до настання події A.

- ***Імовірність*** події A дорівнює відношенню кількості результатів випробування, сприятливих події A, до кількості всіх рівноможливих несумісних результатів такого випробування: $P(A)=\frac{m}{n}$, де m — кількість результатів випробування, сприятливих події A, а n — кількість усіх можливих результатів.

$0\leqslant P(A)\leqslant 1$, де $P(A)=0$ для неможливої події, $P(A)=1$ для вірогідної події, а для будь-якої випадкової події $0<P(A)<1$.

Приклади розв'язування задач

Приклад 1. У класі з 30 учнів, де 17 хлопчиків і 13 дівчаток, навмання вибирається один. Яка ймовірність того, що це хлопчик?

Розв'язання. Позначимо через A подію: навмання обраний учень — хлопчик. Кількість сприятливих події A результатів дорівнює 17, тобто $m=17$, а кількість усіх результатів дорівнює 30, тобто $n=30$, тому $P(A)=\frac{17}{30}$.

Відповідь: $\frac{17}{30}$.

Приклад 2. Яка ймовірність події A — навмання назване число із натуральних чисел від 5 до 28 кратне 5?

Розв'язання. Множина сприятливих події A результатів: $\{5; 10; 15; 20; 25\}$, тобто $m=5$, а всього чисел від 5 до 28 є 24, тобто $n=24$, тому $P(A)=\frac{5}{24}$.

Відповідь: $\frac{5}{24}$.

Приклад 3. Із ящика, у якому a білих, b червоних і c чорних куль, навмання витягли кулю. Яка ймовірність того, що обрана куля буде чорною?

Розв'язання. Нехай подія A — навмання витягнена куля виявилася чорною. Кількість сприятливих події A результатів дорівнює c, тобто $m=c$, усього куль $n=a+b+c$, а отже, $P(A)=\frac{c}{a+b+c}$.

Відповідь: $\frac{c}{a+b+c}$.

Приклад 4. Гральний кубик підкидають один раз. Знайти ймовірність таких подій:

а) випаде 1 (подія A);
б) випаде більше 3 очок (подія B);
в) випаде не більше 4 очок (подія C);
г) кількість очок, що випали, буде квадратом натурального числа (подія D).

Розв'язання. Усього при цьому випробуванні можливе випадання шести цифр, які визначають кількість очок, що випали,— 1, 2, 3, 4, 5, 6, тобто $n=6$.

а) Множина результатів, сприятливих події A: $\{1\}$;
$P(A)=\frac{1}{6}$;
б) множина результатів, сприятливих події B: $\{4;5;6\}$, тому
$P(B)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$;
в) множина результатів, сприятливих події C: $\{1;2;3;4\}$, $m=4$;
$P(C)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$;
г) множина результатів, сприятливих події D: $\{1;4\}$; $m=2$,
$P(D)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$.

Відповідь: а) $\frac{1}{6}$; б) $\frac{1}{2}$; в) $\frac{2}{3}$; г) $\frac{1}{3}$.

Приклад 5. Підкидають дві монети. Яка ймовірність того, що на обох монетах випаде герб?

Розв'язання. Розберемо всі можливі результати випробування: $(Г\ Г)$; $(Г\ Ц)$; $(Ц\ Г)$; $(Ц\ Ц)$ — таких упорядкованих пар чотири, тобто кількість усіх можливих результатів дорівнює 4, $n=4$. На обох монетах герб одночасно (подія A) випадає один раз, тобто кількість сприятливих події A результатів дорівнює 1, $m=1$.

Отже, $P(A)=\frac{1}{4}$.

Відповідь: $\frac{1}{4}$.

Приклад 6. Набираючи номер телефону, абонент забув останню цифру. Знайти ймовірність того, що номер набрано правильно (подія A), якщо відомо, що цифра непарна.

Розв'язання. Непарні цифри — 1, 3, 5, 7, 9, отже, $n=5$, $m=1$,

$P(A)=\frac{1}{5}$.

Відповідь: $\frac{1}{5}$.

Приклад 7. Кидають три монети. Яка ймовірність таких подій: A — гербів більше, ніж цифр, B — випало дві цифри, C — випало 3 герби, D — три монети випали однаковими сторонами, E — цифр не більше однієї?

Розв'язання. Розглянемо всі можливі варіанти випадання монет: $(Г\ Г\ Г)$, $(Г\ Г\ Ц)$, $(Ц\ Г\ Г)$, $(Г\ Ц\ Г)$, $(Ц\ Ц\ Г)$, $(Ц\ Г\ Ц)$, $(Г\ Ц\ Ц)$, $(Ц\ Ц\ Ц)$.

Подія A: $n=8$; $m=4$; $P(A)=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$;

подія B: $n=8$; $m=3$; $P(B)=\frac{3}{8}$;

подія C: $n=8$; $m=1$; $P(C)=\frac{1}{8}$;

подія $Д$: $n=8$; $m=2$; $P(D)=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$;

подія E: $n=8$; $m=4$; $P(E)=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$.

Відповідь: $P(A)=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$; $P(B)=\frac{3}{8}$; $P(C)=\frac{1}{8}$; $P(D)=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$; $P(E)=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$.

Приклад 8. Набір для гри в доміно має 28 кісточок. Навмання беруть 2 кісточки. Вони виявляються не дублями. Знайти ймовірність таких подій:

а) третя навмання взята кісточка виявилася дублем (подія A);

б) третя навмання взята кісточка виявилася не дублем (подія B).

Розв'язання. Було 28 кісточок, дві забрали, отже, $n=26$.

а) Дублів усього 7 кісточок, а саме: $(0;0)$; $(1;1)$; $(2;2)$; $(3;3)$; $(4;4)$; $(5;5)$ і $(6;6)$, отже, $m=7$, тому $P(A)=\frac{7}{26}$;

б) оскільки дублів 7, то недублів $26-7=19$; $m=19$.

$P(B)=\frac{19}{26}$.

Відповідь: а) $\frac{7}{26}$; б) $\frac{19}{26}$.

Приклади розв'язування задач із використанням формул комбінаторики

Приклад 1. На картках написані літери **у**, **ч**, **р**, **а**, **к**. Яка ймовірність того, що, переставляючи навмання всі літери, ми одержимо слово «ручка» (подія A)?

Розв'язання. Множина літер складається з п'яти елементів, використовуються всі елементи, отже, $n=P_5$; $n=5!$

Із усіх одержуваних «слів» нас влаштовує тільки одне, отже, $m=1$, тобто $P(A)=\frac{1}{5!}=\frac{1}{120}$.

Відповідь: $\frac{1}{120}$.

Приклад 2. На картках записані натуральні числа від 1 до 20.

Яка ймовірність того, що сума чисел на взятих навмання двох картках дорівнює 11 (подія A)?

Розв'язання. Вибрати дві картки із 20 можна C_{20}^2 способами, тобто $n=C_{20}^2=\frac{20\cdot 19}{2!}=190$.

Множина чисел, сума яких дорівнює 11:
$\{(1;10);(2;9);(3;8);(4;7);(5;6)\}$.

Отже, $m=5$. Тоді $P(A)=\dfrac{5}{190}=\dfrac{1}{38}$.

Відповідь: $\dfrac{1}{38}$.

Приклад 3. Кидають 10 монет. Яка ймовірність того, що на всіх монетах випаде герб (подія *B*)?

Розв'язання. $n=\bar{A}_2^{10}=2^{10}=1024$. Або: на кожній монеті може випасти або герб, або цифра, тобто можливі два варіанти; за правилом добутку (див. розділ «Комбінаторика») $n=\underbrace{2\cdot 2\ldots\cdot 2}_{10\text{ р}}=2^{10}$.

$m=1$, оскільки на всіх монетах герб може випасти єдиним чином.

$P(B)=\dfrac{1}{1024}$.

Відповідь: $\dfrac{1}{1024}$.

Приклад 4. Замóк містить 4 диски, на кожному з яких 8 літер. Замок відкривається тільки в тому разі, якщо на кожному диску набрана потрібна літера. Яка ймовірність того, що замок відкриється з першої спроби, якщо код невідомий?

Розв'язання. Кількість можливих результатів $n=\bar{A}_8^4=8^4$. Нехай подія *B* — замок відкриється з першої спроби. Кількість сприятливих події *B* результатів $m=1$. $P(B)=\dfrac{1}{8^4}$.

Відповідь: $\dfrac{1}{8^4}$.

Приклад 5. Номер телефону складається з семи цифр. Яка ймовірність того, що всі цифри в номері різні?

Розв'язання. На кожному з семи місць номера може стояти кожна з 10 цифр, тобто кількість усіх можливих номерів $n=\bar{A}_{10}^7$ (вважаємо, що номер може починатися з 0).

Тепер обчислимо кількість сприятливих події B (усі цифри в номері різні) результатів: із 10 можливих цифр вибираються 7 різних, отже, це розміщення без повторень (використовується не вся множина цифр, і порядок елементів у номері важливий). Отже, $m=A_{10}^7$.

$$P(B)=\frac{A_{10}^7}{\bar{A}_{10}^7}=\frac{10!}{10^7\cdot 3!}=0{,}0605.$$

Відповідь: 0,0605.

Приклад 6. У колоді 52 карти. Гравець навмання одержує 3 карти. Яка ймовірність того, що це будуть трійка, сімка й туз (подія A)?

Розв'язання. Усього можливих варіантів $n = C_{52}^{3}$. Одержати одну трійку із чотирьох карт (трійок) колоди існує C_4^1 способів, одну сімку — C_4^1 способів і туз — C_4^1 способів, разом сприятливих результатів $C_4^1 \cdot C_4^1 \cdot C_4^1$.

$$P(A) = \frac{C_4^1 \cdot C_4^1 \cdot C_4^1}{C_{52}^3} = \frac{4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 3!}{52 \cdot 51 \cdot 50} = \frac{4 \cdot 4}{13 \cdot 25 \cdot 17} = \frac{16}{5525}.$$

Відповідь: $\frac{16}{5525}$.

Приклад 7. У ящику 90 спілих і 10 зелених яблук. Яка ймовірність того, що серед 10 навмання взятих яблук зелених не буде?

Розв'язання. Усього яблук 100, з них треба вибрати 10, порядок не важливий, тобто кількість усіх результатів $n = C_{100}^{10}$. Результати, сприятливі події А, заданій в умові задачі, можливі, якщо 10 яблук вибираються із 90 спілих яблук, тобто $m = C_{90}^{10}$. Тоді

$$P(A) = \frac{C_{90}^{10}}{C_{100}^{10}} = \frac{90! \cdot 90! \cdot 10!}{80! \cdot 10! \cdot 100!} = \frac{81 \cdot 82 \cdot 83 \cdot 84 \cdot 85 \cdot 86 \cdot 87 \cdot 88 \cdot 89 \cdot 90}{91 \cdot 92 \cdot 93 \cdot 94 \cdot 95 \cdot 96 \cdot 97 \cdot 98 \cdot 99 \cdot 100} \approx 0{,}33.$$

Відповідь: $\approx 0{,}33$.

Приклад 8. Усі 30 учнів класу народилися в 1997 році. Яка ймовірність того, що всі учні цього класу народилися в різні дні цього року?

Розв'язання. У 1997 році 365 днів, оскільки рік невисокосний, тобто будь-який із 30 учнів може мати день народження у будь-який із 365 днів року, тобто $n = 365^{30}$. Нехай подія A — всі учні цього класу народилися в різні дні. Число сприятливих події A результатів $m = C_{365}^{30}$, оскільки з точки зору стороннього спостерігача все одно, хто народився в який день. $P(A) = \frac{C_{365}^{30}}{365^{30}}$.

Відповідь: $\frac{C_{365}^{30}}{365^{30}}$.

Приклад 9. Із колоди в 36 карт навмання вибирають 6 карт. Яка ймовірність того, що серед цих 6 карт виявляться 2 тузи (подія A)?

Розв'язання. У виборі 6 карт із 36 порядок вибору значення не має і використовується не вся множина карт, отже, $n = C_{36}^{6}$.

Із чотирьох тузів потрібно вибрати два, отже, C_4^2 — це кількість сприятливих подій. Інших карт, без тузів,— 32, із них потрібно вибрати 4 карти, які залишилися, що можна зробити C_{32}^4 способами. За правилом добутку $m = C_4^2 \cdot C_{32}^4$,

$$P(A) = \frac{C_4^2 \cdot C_{32}^4}{C_{36}^6} = \frac{4!\cdot 32!\cdot 30!\cdot 6!}{2!\cdot 2!\cdot 28!\cdot 4!\cdot 36!} = \frac{30\cdot 29\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{2\cdot 2\cdot 36\cdot 35\cdot 34\cdot 33} = \frac{5\cdot 29}{7\cdot 17\cdot 11} \approx \mathbf{0{,}11}.$$

Відповідь: $\approx 0{,}11$.

Приклад 10. Із колоди в 36 карт навмання вибирають 6 карт. Яка ймовірність того, що серед цих 6 карт виявляться 2 тузи, 2 короля і 2 дами будь-якої масті (подія A)?

Розв'язання. $n = C_{36}^6$.

Вибрати 2 тузи із 4, що містяться в колоді, можна C_4^2 способами, королів — C_4^2 способами, дам — C_4^2 способами. За правилом добутку

$m = C_4^2 \cdot C_4^2 \cdot C_4^2$;

$$P(A) = \frac{C_4^2 \cdot C_4^2 \cdot C_4^2}{C_{36}^6} = \frac{4\cdot 3\cdot 4\cdot 3\cdot 4\cdot 3\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{2!\cdot 2!\cdot 2!\cdot 36\cdot 35\cdot 34\cdot 33\cdot 32\cdot 31} = \frac{9}{17\cdot 7\cdot 11} \approx \mathbf{0{,}007}.$$

Відповідь: $\approx 0{,}007$.

Приклад 11. Що ймовірніше — виграти в рівного за силою супротивника:

а) три партії із чотирьох (подія A) чи п'ять із восьми (подія B);

б) не менше трьох партій із чотирьох (подія С) або не менше п'яти із восьми (подія D)?

Розв'язання

а) У кожній партії може бути два результати — або виграш, або програш, і оскільки партій 4, то $n = 2^4$, кількість сприятливих результатів для події A — виграш одного із гравців у трьох партіях із чотирьох — дорівнює C_4^3;

$$P(A) = \frac{C_4^3}{\bar{A}_2^4} = \frac{4}{2^4} = \frac{1}{4}, \text{ оскільки } C_4^3 = C_4^1.$$

Якщо ж партій було 8, то $n = 2^8$, а $m = C_8^5$, тобто $P(B) = \frac{C_8^5}{\bar{A}_2^8} =$

$= \frac{C_8^3}{2^8} = \frac{8\cdot 7\cdot 6}{3!\,2^8} = \frac{7}{32}$; оскільки $\frac{1}{4} > \frac{7}{32}$, то ймовірність виграти у 3 партіях із 4 більша, ніж у 5 партіях із 8;

б) подія C — виграш у не менш ніж трьох партіях із 4: складається з двох частин — це або виграш у 3 партіях із 4, або у 4 партіях із 4. $P(C)=\dfrac{C_4^3+C_4^4}{\bar{A}_2^4}=\dfrac{4+1}{2^4}=\dfrac{5}{16}=0,312$.

Подія D — виграш у не менш ніж у п'яти партіях із 8:

$$P(D)=\frac{C_8^5+C_8^6+C_8^7+C_8^8}{\bar{A}_2^8}=\frac{C_8^3+C_8^2+C_8^1+1}{2^8}=\frac{\frac{8\cdot7\cdot6}{3!}+\frac{8\cdot7}{2!}+8+1}{256}=$$

$$=\frac{56+28+8+1}{256}=\frac{93}{256}\approx0,363;$$

$0,363>0,312$.

Відповідь: а) ймовірність виграти у трьох партіях із чотирьох більша, ніж у п'яти партіях із восьми; б) ймовірніше виграти не менше трьох партій із чотирьох, ніж не менше п'яти із восьми.

Приклад 12. Замок із «секретом» містить чотири шестигранні призми, які обертаються незалежно одна від одної навколо спільної осі. На кожній бічній грані призми вибито одну цифру від 1 до 6. Обертаючи призми, одержують у прорізі замка чотирицифрове число. Замок відкривається лише тоді, коли набране чотирицифрове число, що становить «секрет» замка. Яка ймовірність того, що людина, яка не знає «секрету» замка, відкриє його за один довільний набір чотирицифрового числа (подія A)?

Розв'язання. $m=1$; $n=6^4$, оскільки в кожному з чотирьох віконець може виявитися будь-яка з 6 цифр.

$$P(A)=\frac{1}{6^4}=\frac{1}{1296}\approx0,0008.$$

Відповідь: $\approx0,0008$.

Задачі для самостійного розв'язування

1. У ящику 4 білі, 5 червоних і 3 чорні кулі. Яка ймовірність того, що навмання обрана куля буде червоною?

2. Підкинули два гральні кубики. Знайдіть імовірність таких подій:

а) A — на обох кубиках випала однакова кількість очок;
б) B — сума очок на кубиках дорівнює 5;
в) C — сума очок на кубиках більша за 8;
г) D — сума очок на кубиках — парне число.

3. Абонент забув дві останні цифри номеру телефону й набирає їх навмання. Яка ймовірність того, що він набере їх правильно, якщо абонент тільки пам'ятає, що числа парні та різні?

4. Телефонна лінія, що з'єднує два пункти A і B, розташовані один від одного на відстані 2 км, обірвалася у невідомому місці. Яка ймовірність того, що обрив стався не далі 450 м від пункту A?

5. Із 15 квитків, пронумерованих числами від 1 до 15, навмання виймають один. Яка ймовірність того, що номером узятого квитка є число, яке не ділиться ані на 2, ані на 3?

6. Беруть навмання кісточку доміно. Вона виявилася не дублем. Знайдіть імовірність того, що другу, теж узяту навмання, кісточку доміно, можна прикласти до першої.

7. Із карток, де кожна літера записана на окремій картці, склали слово «математика». Після цього картки змішали. Яка ймовірність скласти слово «математика» знову?

8. Кидають три монети. Яка ймовірність того, що на всіх трьох монетах випаде герб?

9. У серії з 200 виробів 9 бракованих. Яка ймовірність того, що перевіряючий виявить у 10 навмання взятих виробах 2 браковані?

10. У пачці 100 лотерейних квитків, на один із яких припадає виграш машини. Яка ймовірність одержати цей квиток, якщо купити 10 квитків?

11. Із групи, до якої входять 6 чоловіків і 4 жінки, вибрали 7 осіб. Яка ймовірність того, що серед них не менше 3 жінок?

12. Набираючи номер телефону, абонент забув останню цифру і набрав її навмання. Знайдіть імовірність того, що номер набрано правильно. Розв'яжіть задачу для випадку, якщо остання цифра номеру:

а) парна; б) не більша ніж 6.

13. У шаховому турнірі беруть участь 30 гравців, яких жеребкуванням ділять на дві команди по 15 гравців. Яка ймовірність того, що два найсильніші гравці гратимуть у різних командах?

14. Із 30 карток із літерами російського алфавіту беруть навмання 5 карток. Яка ймовірність того, що із п'яти літер у порядку вибору карток можна скласти слово «мішок»?

15. На полицю ставлять навмання 10 книг. Знайдіть імовірність того, що при цьому три потрібні книги стоятимуть поруч.

16. Учасники жеребкування беруть із ящика жетони з номерами від 1 до 100. Знайдіть імовірність того, що номер першого жетона не містить цифру 6.

17. У коробці 6 однакових кубиків, пронумерованих числами від 1 до 6. По одному витягають усі кубики. Знайдіть імовірність того, що номери витягнутих кубиків з'являться в порядку зростання.

18. Відділ технічного контролю перевіряє половину виробів певної партії і визнає придатною всю партію, якщо між перевіреними виробами не було жодного бракованого. Яка ймовірність того, що партія з 20 виробів, у якій два бракованих вироби, буде визнана придатною?

19. У коробці лежать різнокольорові кульки, з яких 40 — червоні, 20 — коричневі, а решта — жовті. З'ясуйте, скільки жовтих кульок лежить у коробці, якщо ймовірність вибору випадковим чином жовтої кульки дорівнює $\frac{1}{3}$.

20. Власник банкоматної картки забув останні дві цифри свого PIN-коду, але пам'ятає, що вони різні. Знайдіть імовірність того, що з першої спроби він одержить доступ до системи.

Самостійна робота 1

(Класична ймовірність. Використання формул комбінаторики)

I варіант (з розв'язаннями)

У завданнях 1—2 виберіть одну правильну, на вашу думку, відповідь.

1. У ящику містяться 3 білі й 8 чорних куль. Яка ймовірність того, що навмання вийнята куля виявиться червоною?

А	Б	В	Г	Д
1	0	$\frac{3}{11}$	$\frac{8}{11}$	$\frac{3}{8}$

Розв'язання. Подія неможлива. $P(V)=0$.

Відповідь: Б.

2. Набір для гри в доміно містить 28 кісточок. Були вилучені 3 кісточки, які виявилися не дублями. Знайдіть імовірність того, що четверта взята навмання кісточка виявиться дублем.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{7}{28}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{4}{28}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{7}{25}$

Розв'язання. Нехай подія A — четверта кісточка — дубль. У наборі для гри в доміно 7 дублів і 21 недубль. Якщо були вилучені 3 недублі, то всього залишилося 25 кісточок, із яких 7 дублів, тому ймовірність витягти дубль із 25 кісточок є $P(A)=\frac{7}{25}$.

Відповідь: Д.

3. Зі 100 квитків, пронумерованих числами від 1 до 100, навмання витягають один. Яка ймовірність того, що номером узятого квитка є число, кратне 7, але не кратне 5 і 2 (подія A)?

Розв'язання. Множина чисел, що задовольняють умову кратності 7, але не кратних 2 і 5, із чисел від 1 до 100: $\{7; 21; 40; 63; 77; 91\}$, тобто $m=6$; $n=100$, тому $P(A)=\frac{6}{100}=\frac{3}{50}$.

Відповідь: $\frac{3}{50}$.

4. В одному ящику 5 білих і 7 чорних кульок. У другому — 8 білих і 3 чорні кульки. Чому дорівнює ймовірність того, що обидві кульки виявляться білими, якщо з кожного ящика навмання витягти по одній кульці?

Розв'язання. У першому ящику 5 білих із 12 кульок, тому ймовірність витягти білу кульку з першого ящика (подія A) $P(A)=\frac{5}{12}$. Ймовірність витягти білу кульку із другого ящика (подія B) $P(B)=\frac{8}{11}$.

Події A і B незалежні, тому ймовірність витягти білу кульку з обох ящиків $P(AB)=P(A)P(B)=\frac{5}{12}\cdot\frac{8}{11}=\frac{10}{33}$.

Відповідь: $\frac{10}{33}$.

5. На кожній із 9 карток записана одна із таких літер: **р, о, з, і, в, л, е, е, т.** Картки перемішують і розкладають у ряд. Яка ймовірність того, що утвориться слово «телевізор» (подія A)?

Розв'язання. Усього літер 9, тому всього можливо одержати із них «слів» $n=9!$ Усього сприятливих результатів 2, оскільки є 2 однакові літери «е» і нас влаштовують перестановки з цих літер, тобто $m=2$, а $P(A)=\frac{2}{9!}$.

Відповідь: $\frac{2}{9!}$.

6. У ящику 70 яблук, 15 з яких зелені. Яка ймовірність того, що серед 6 вийнятих навмання яблук зелених не буде (подія A)?

Розв'язання. Усього способів витягти 6 яблук із 70 $n=C_{70}^6$, а сприятливих результатів $m=C_{55}^6$, а отже, $P(A)=\frac{C_{55}^6}{C_{70}^6}=$

$$=\frac{55\cdot54\cdot53\cdot52\cdot51\cdot50\cdot6!}{6!\cdot70\cdot69\cdot68\cdot67\cdot66\cdot65}=\frac{5\cdot9\cdot53}{7\cdot23\cdot67}\approx\frac{2385}{10787}\approx0,22.$$

Відповідь: $\approx0,22$.

II варіант

У завданнях 1—2 виберіть одну правильну, на вашу думку, відповідь.

1. Кидаємо гральну кісточку. Яка ймовірність випадання одного, двох, трьох, чотирьох, п'яти або шести очок?

А	Б	В	Г	Д
1	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$

2. Набір для гри в доміно містить 28 кісточок. Було прибрано 2 кісточки, які виявилися не дублями. Знайдіть імовірність того, що третя взята навмання кісточка виявиться не дублем.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{19}{21}$	$\frac{19}{28}$	$\frac{19}{26}$	$\frac{21}{28}$	$\frac{21}{26}$

3. Із 30 квитків, пронумерованих числами від 1 до 30, навмання витягають один. Яка ймовірність того, що номером узятого квитка є число, кратне 4, але не кратне 5?

4. В одному ящику 6 білих і 5 чорних кульок. У другому — 4 білі й 8 чорних кульок. Чому дорівнює ймовірність того, що обидві кульки виявляться чорними, якщо з кожного ящика навмання витягти по одній кульці?

5. На кожній із 7 карток записана одна з таких літер: **р**, **т**, **н**, **м**, **о**, **і**, **о**. Картки перемішують і розкладають у ряд. Яка ймовірність того, що утвориться слово «монітор»?

6. У ящику 50 яблук, 10 із яких неспілі. Яка ймовірність того, що серед шести вийнятих навмання яблук чотири спілих?

III варіант

У завданнях 1—2 виберіть одну правильну, на вашу думку, відповідь.

1. Яка ймовірність випадання цифри 8 при киданні гральної кісточки?

А	Б	В	Г	Д
1	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$

2. Набір для гри в доміно містить 28 кісточок. Були прибрані 2 кісточки, одна з яких дубль. Знайдіть імовірність того, що третя взята навмання кісточка — дубль.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{5}{26}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{3}{14}$	$\frac{3}{13}$	$\frac{7}{26}$

3. У ящику міститься 16 кульок, причому кількість білих кульок відноситься до кількості чорних кульок як 3 : 5. Знайдіть імовірність того, що перша навмання витягнута кулька виявиться білою.

4. В одному ящику 7 білих і 6 чорних кульок. У другому — 4 білі й 9 чорних кульок. Із кожного ящика навмання витягають по одній кульці. Яка ймовірність того, що обидві кульки виявляться різнокольоровими?

5. На кожній із 10 карток записана одна з таких літер: **к**, **с**, **р**, **ф**, **о**, **а**, **а**, **а**, **т**, **т**. Картки перемішують і розкладають у ряд. Яка ймовірність того, що утвориться слово «катастрофа»?

6. У партії зі 100 деталей 6 деталей нестандартні. Яка ймовірність у десяти взятих навмання деталях виявити 8 стандартних?

2. Формула Бернуллі. Закон великих чисел

Стислі теоретичні відомості

Сума і добуток подій

- Подія називається ***складною***, якщо поява її залежить від появи інших простих подій. Наприклад, при киданні двох гральних кубиків у сумі випало 10 очок.
- ***Сумою подій*** A і B називається подія C, що полягає у здійсненні під час одиничного випробування або події A, або події B, або обох разом $C = A + B$.

Приклади

1) Подія A — влучення в ціль з першого пострілу, подія B — влучення з другого пострілу. Тоді $C = A + B$ — подія, що означає влучення в ціль узагалі.

2) Подія A — поява чорної кулі з урни, у якій містяться чорні, зелені, червоні та сині кулі. Подія B — поява зеленої кулі, подія C — поява червоної кулі, а подія D — поява синьої кулі, тоді $E = A + B + C + D$ — подія, що означає появу кожної з куль.

Ймовірність суми двох несумісних подій дорівнює сумі ймовірностей цих подій, тобто $P(A+B) = P(A) + P(B)$.

- Подія $\bar{A}$ полягає у непояві події A і називається ***протилежною*** A.

Висновок. Сума ймовірностей протилежних подій дорівнює одиниці, тобто

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1. \qquad (*)$$

- ***Добутком двох подій*** A і B називається подія C, що полягає в появі при одиничному випробуванні і події A, і події B: $C = AB$.

Приклад

Нехай подія A_1 — промах при першому пострілі, подія A_2 — промах при другому пострілі, подія A_3 — промах при третьому пострілі, тоді $A = A_1A_2A_3$ — подія, яка полягає в тому, що в мішень не буде жодного влучення.

- Дві події називаються ***незалежними***, якщо ймовірність появи однієї з них не залежить від того, відбулася чи ні друга подія.

Ймовірність добутку двох незалежних подій A і B дорівнює добутку ймовірностей цих подій, тобто $P(AB)=P(A)\cdot P(B)$.

Якщо події A_1, A_2, A_3, …, A_n — взаємно незалежні, то ймовірність здійснення хоча б однієї з них може бути виражена через імовірність цих подій за формулою

$$P(A)=1-(1-P(A_1))(1-P(A_2))\dots(1-P(A_n)).$$

Оскільки $1-P(A_i)=P(\bar{A}_i)$ (див. формулу (*)), то

$$P(A)=1-P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)\dots P(\bar{A}_n).$$

(Добуток $P(\bar{A}_1)\dots P(\bar{A}_n)$ є ймовірністю того, що жодна із цих подій не відбудеться.)

Якщо події рівноймовірні, тобто $P(A_1)=P(A_2)=\dots=P(A_n)=p$, то $P(A)=1-(1-p)^n$.

- ***Взаємно незалежними*** називаються такі випробування, у яких імовірність результатів кожного з них не залежить від результатів інших випробувань.

Приклади

1) В урні містяться a білих і b чорних куль. З урни виймають кулю, потім повертають назад і перемішують, операції повторюються (тобто виймають кулю, повертають назад і перемішують). Випробування взаємно незалежні.

2) Серія пострілів у мішень: кожен постріл — влучення або промах, кожен постріл — незалежне випробування.

Формула Бернуллі. Задачі «повернутої кулі»

Якщо виконуються n незалежних випробувань, у кожному з яких подія A відбувається з імовірністю p, а не відбувається з імовірністю q, де $q=1-p$ (див. формулу (*)), то ймовірність того, що подія А настане m разів, визначається за формулою

$P_{m,n}=C_n^m p^m q^{n-m}$ — формула Бернуллі, де $C_n^m=\dfrac{n!}{(n-m)!m!}$.

Закон великих чисел

- ***Статистична частота події*** $P_N\{A\}=\dfrac{m_N}{N}$, де N — кількість випробувань, а m_N — кількість випробувань, у яких з'явилася подія A.

- ***Статистичною імовірністю*** події A називається число P, навколо якого зосереджується значення статистичної частоти появи події A при зростанні числа випробувань.

Теорема Бернуллі

Якщо в ряді випробувань імовірність деякої події залишається для кожного випробування сталою, то можна стверджувати, що при великій кількості випробувань статистична частота цієї події відрізнятиметься як завгодно мало від її ймовірності:

$$P(A) \approx P_N\{A\}.$$

Приклади розв'язування задач

Приклад 1. При стрільбі по мішені стрілок може влучити в одну з чотирьох зон. Нехай імовірність події A (влучення в першу зону) дорівнює 0,24, події B (влучення в другу зону) дорівнює 0,17, події C (влучення в третю зону) дорівнює 0,12. Знайти ймовірність того, що з одного пострілу стрілок влучить або в першу, або в другу зону.

Розв'язання. Події A, B, C є несумісними подіями, оскільки з одного пострілу можна влучити тільки в одну із зон. Імовірність суми двох несумісних подій дорівнює сумі ймовірностей цих подій, тобто $P(A+B)=P(A)+P(B)$; $P(A+B)=0{,}24+0{,}17=0{,}41$.

Відповідь: 0,41.

Приклад 2. Пасажир очікує на трамвай маршруту № 1 або маршруту № 2 на зупинці, де зупиняються трамваї чотирьох маршрутів: № 1; № 2; № 3; № 4.

Вважаючи, що трамваї всіх маршрутів підходять однаково часто, знайти ймовірність того, що перший трамвай, котрий під'їхав, буде потрібним пасажирові.

Розв'язання. Подія A — перший трамвай, що під'їхав,— це трамвай, що прямує маршрутом № 1. Подія B — перший трамвай — це трамвай № 2. Імовірність події A дорівнює $\frac{1}{4}$, імовірність події B також дорівнює $\frac{1}{4}$. Події A і B несумісні, тому $P(A+B)=P(A)+$ $+P(B)=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$.

Відповідь: $\frac{1}{2}$.

Приклад 3. Автомат штампує деталі. Імовірність того, що за одну зміну не буде виготовлено жодної нестандартної деталі, дорівнює 0,9. Яка ймовірність того, що будуть стандартними всі деталі, виготовлені за три зміни?

Розв'язання. Нехай подія A — виготовлення стандартних деталей на 1-й зміні, подія B — на 2-й зміні й подія C — на 3-й зміні. Оскільки нас цікавить здійснення і події A, і події B, і події C, то $P(ABC)=P(A)\cdot P(B)\cdot P(C)=(0,9)^3=0,729$.

Відповідь: 0,729.

Приклад 4. Два гравці кидають м'ячі у ворота. Імовірність влучення м'яча у ворота дорівнює 0,6. Яка ймовірність влучення у ворота хоча б одного м'яча, якщо одночасно кидати два м'ячі?

Розв'язання. Одночасне кидання двох м'ячів — події взаємно незалежні, тоді ймовірність події A — здійснення хоча б однієї з них — обчислюється за формулою

$$P(A)=1-(1-P(A_1))(1-P(A_2)).$$

$$P(A)=1-(1-0,6)(1-0,6)=1-0,4\cdot 0,4=1-0,16=0,84.$$

Відповідь: 0,84.

Приклад 5. Імовірність того, що зі взятого навмання зерна виросте колос, який міститиме не менше 50 зерен, дорівнює 0,6. Знайти ймовірність того, що зі взятих навмання 10 зерен виросте хоча б один колос, який міститиме не менше 50 зерен.

Розв'язання. Одержання колосу з узятих навмання 10 зерен є 10 взаємно незалежних подій. Імовірність події A — виросте хоча б один колос, який міститиме не менше 50 зерен,— можна обчислити за формулою

$$P(A)=1-(1-P(A_1))\ldots(1-P(A_{10}))=1-(1-0,6)^{10}=1-(0,4)^{10}\approx$$

$$\approx 1-0,00001=0,9999.$$

Відповідь: 0,9999.

Приклад 6. Передавачі 1, 2 і 3 незалежно один від одного посилають по одному повідомленню приймачу. Імовірності прийому послання приймачем від передавачів 1, 2, 3 відповідно дорівнюють 0,4; 0,5; 0,7. Знайти ймовірність того, що приймачем буде прийнято:

а) тільки одне повідомлення;

б) хоча б одне повідомлення.

Розв'язання. Нехай події A_1, A_2, A_3 — прийом повідомлення від передавачів 1, 2, 3 відповідно. Тоді події $\bar{A}_1$, $\bar{A}_2$, $\bar{A}_3$ — повідомлення від передавачів відповідно 1, 2, 3 не проходить.

Подія A — прийом тільки одного повідомлення. Подія B — прийом хоча б одного повідомлення. Ймовірності подій A_1, A_2, A_3: $P(A_1)=0{,}4$; $P(A_2)=0{,}5$; $P(A_3)=0{,}7$.

а) $P(A)=P(A_1\bar{A}_2\bar{A}_3)+P(\bar{A}_1A_2\bar{A}_3)+P(\bar{A}_1\bar{A}_2A_3)=P(A_1)\cdot P(\bar{A}_2)\times$
$\times P(\bar{A}_3)+P(\bar{A}_1)P(A_2)P(\bar{A}_3)+P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)P(A_3)=0{,}4\cdot 0{,}5\cdot 0{,}3+$
$+0{,}6\cdot 0{,}5\cdot 0{,}3+0{,}6\cdot 0{,}5\cdot 0{,}7=0{,}06+0{,}09+0{,}21=0{,}36$;

б) оскільки події взаємно незалежні, то ймовірність здійснення хоча б однієї з них може бути отримана за формулою:
$P(B)=1-(1-P(A_1))(1-P(A_2))(1-P(A_3))$;

$P(B)=1-0{,}6\cdot 0{,}5\cdot 0{,}3=1-0{,}09=0{,}91$.

Відповідь: а) 0,36; б) 0,91.

Приклад 7. Серед волокон бавовни певного сорту в середньому $\frac{3}{4}$ мають довжину меншу за 4,5 см і $\frac{1}{4}$ — довжину, яка більша або дорівнює 4,5 см. Знайти ймовірність того, що серед трьох волокон два будуть коротшими, а одне — не коротшим за 4,5 см.

Розв'язання. Волокно має довжину меншу за 4,5 см (подія A_1), з імовірністю $P(A_1)=\frac{3}{4}$, а не меншу за 4,5 (подія A_2) — з імовірністю $P(A_2)=\frac{1}{4}$. У трьох незалежних випробуваннях імовірність появи короткого волокна дорівнює $\frac{3}{4}$, а ймовірність непояви його $\frac{1}{4}$. За формулою Бернуллі:

$$P_{2;3}=C_3^2\left(\frac{3}{4}\right)^2\left(\frac{1}{4}\right)^1=C_3^1\cdot\frac{9}{16}\cdot\frac{1}{4}=\frac{3\cdot 9}{64}=\frac{27}{64}.$$

Приклад 8. Два біатлоністи, незалежно один від одного, роблять по два постріли кожен по своїй мішені. Імовірність влучення в мішень при одному пострілі для першого спортсмена дорівнює $\frac{3}{4}$, а для другого — 0,8. Виграє той, хто влучає в мішень більшу кількість разів. Знайдіть імовірність того, що виграє перший біатлоніст.

Розв'язання. Нехай подія B — перший спортсмен влучає в мішень, а $\overline{B}$ — не влучає, відповідно подія C — другий спортсмен влучає в мішень, а $\overline{C}$ — не влучає. Тоді, щоб перший виграв, нас влаштовують такі події:

$BBC\overline{C}+BB\overline{C}C+BB\overline{C}\overline{C}+B\overline{B}\overline{C}\overline{C}+\overline{B}B\overline{C}\overline{C}$, оскільки події ці незалежні, і $P(B)=\frac{3}{4}$, а $P(\overline{B})=1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$, $P(C)=0{,}8=\frac{4}{5}$, $P(\overline{C})=1-0{,}8=$ $=0{,}2=\frac{1}{5}$.

$$P(A)=P(B)\cdot P(B)\cdot P(C)\cdot P(\overline{C})+P(B)P(B)P(\overline{C})P(C)+$$

$$+P(B)P(B)P(\overline{C})P(\overline{C})+P(B)P(\overline{B})P(\overline{C})P(\overline{C})+P(\overline{B})P(B)P(\overline{C})P(\overline{C})=$$

$$=2\left(\frac{3}{4}\right)^2\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{5}+\left(\frac{3}{4}\right)^2\left(\frac{1}{5}\right)^2+2\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^2=\frac{18}{4\cdot25}+\frac{9}{16\cdot25}+\frac{3}{8\cdot25}=$$

$$=\frac{72+9+6}{16\cdot25}=\frac{87}{400}.$$

Відповідь: $\frac{87}{400}$.

Приклад 9. Імовірність події A — хоча б одне влучення в ціль при чотирьох пострілах — дорівнює $\frac{7}{10}$. Знайти p — ймовірність влучення в ціль при одному пострілі.

Розв'язання. Імовірність $P(A)$ хоча б одного влучення в ціль дорівнює $P(A)=1-(1-p)(1-p)(1-p)(1-p)=1-(1-p)^4$, де $(1-p)^4$ — ймовірність не влучити жодного разу в ціль.

$$\frac{7}{10}=1-(1-p)^4;\ (1-p)^4=\frac{3}{10};\ 1-p=\sqrt[4]{\frac{3}{10}};\ p=1-\sqrt[4]{\frac{3}{10}}\approx1-0{,}74=0{,}26.$$

Відповідь: 0,26.

Приклад 10. Яка ймовірність того, що при 7 підкиданнях гральної кісточки одиниця випаде більше чотирьох разів?

Розв'язання. Імовірність випадання одиниці $p=\frac{1}{6}$, а невипадання $q=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$. Треба знайти $P_{5;7}+P_{6;7}+P_{7;7}=C_7^5\left(\frac{1}{6}\right)^5\left(\frac{5}{6}\right)^2+$
$+C_7^6\left(\frac{1}{6}\right)^6\left(\frac{5}{6}\right)^1+C_7^7\left(\frac{1}{6}\right)^7\left(\frac{5}{6}\right)^0=\frac{21\cdot 5^2}{6^7}+\frac{7\cdot 5}{6^7}+\frac{1}{6^7}=\frac{561}{6^7}\approx 0{,}002$;

$\left(C_7^5=C_7^2=\frac{7\cdot 6}{2!}=21;\ C_7^6=C_7^1=7;\ C_7^7=1\right)$.

Відповідь: 0,002.

Приклад 11. Команда стрільців веде стрільбу по мішені, що рухається. Стрільці однаково підготовлені, й імовірність влучення в ціль у кожного дорівнює p. Скільки стрільців у команду повинен поставити тренер, щоб імовірність влучення в ціль була не меншою за q, де $q=1-p$? (Ціль вважається враженою, якщо в неї влучає хоча б один стрілець.) Розв'яжіть задачу для: а) $p=0{,}001$; б) $p=0{,}5$.

Розв'язання. Імовірність влучення в ціль хоча б одного зі стрільців дорівнює $P(A)=1-(1-p)^n$, і за умовою $P(A)\geqslant q$, тоді $1-(1-p)^n\geqslant q$, оскільки $q=1-p$, то $1-(1-p)^n\geqslant 1-p$, тобто $(1-p)^n\leqslant p$. Прологарифмуємо цю нерівність за основою 10: $\lg(1-p)^n\leqslant\lg p$; $n\lg(1-p)\leqslant\lg p$, де $\lg(1-p)<0$, оскільки $0<1-p<1$; а отже, $n\geqslant\frac{\lg p}{\lg(1-p)}$.

а) $p=0{,}001$, тоді $n\geqslant\frac{\lg 0{,}001}{\lg(1-0{,}001)}=\frac{-3}{\lg 0{,}999}=\frac{-3}{-0{,}00044}=6905$;

б) $p=0{,}5$, тоді $n\geqslant\frac{\lg 0{,}5}{\lg 0{,}5}=1$.

Відповідь: а) 6905; б) 1.

Приклад 12. Що ймовірніше — виграти в рівного по силі супротивника:

а) три партії з чотирьох чи п'ять із восьми;

б) не менше трьох партій із чотирьох чи не менше п'яти із восьми?

Розв'язання. Оскільки супротивники рівні силою, то ймовірність виграшу $p=\frac{1}{2}$, така сама ймовірність і програшу $q=\frac{1}{2}$.

а) Три партії з чотирьох:

$$P_{3;4} = C_4^3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^1 = C_4^1 \cdot \frac{1}{2^4} = \frac{4}{2^4} = \frac{1}{4}.$$

П'ять партій із восьми:

$$P_{5;8} = C_8^5 \left(\frac{1}{2}\right)^5 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = C_8^3 \cdot \frac{1}{2^8} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{2 \cdot 3 \cdot 2^8} = \frac{7}{2^5} = \frac{7}{32}.$$

$\frac{1}{4} > \frac{7}{32}$ — ймовірніше виграти три партії з чотирьох;

б) не менше 3 із 4 складається з $P_{3;4}$ і $P_{4;4}$. Знайдемо

$$P_{4;4} = C_4^4 \left(\frac{1}{2}\right)^4 \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1 \cdot \frac{1}{2^4} \cdot 1 = \frac{1}{16}; \ P_{3;4} + P_{4;4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} = \frac{5}{16}.$$

Не менше 5 із 8 складається з $P_{5;8}$; $P_{6;8}$; $P_{7;8}$ і $P_{8;8}$.

Знайдемо $P_{6;8} = C_8^6 \left(\frac{1}{2}\right)^6 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = C_8^2 \cdot \frac{1}{2^8} = \frac{8 \cdot 7}{2 \cdot 2^8} = \frac{7}{2^6}$;

$$P_{7;8} = C_8^7 \left(\frac{1}{2}\right)^7 \left(\frac{1}{2}\right)^1 = C_8^1 \cdot \frac{1}{2^8} = \frac{8}{2^8} = \frac{1}{2^5}; \ P_{8;8} = C_8^8 \left(\frac{1}{2}\right)^8;$$

$$P_{5;8} + P_{6;8} + P_{7;8} + P_{8;8} = \frac{7}{2^5} + \frac{7}{2^6} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^8} = \frac{56 + 28 + 8 + 1}{2^8} = \frac{93}{256}.$$

Порівняємо $\frac{5}{16}$ і $\frac{93}{256}$; $\frac{80}{256} < \frac{93}{256}$.

Менш імовірно виграти не менше 3 із 4 партій, ніж не менше 5 із 8 партій.

Відповідь: а) ймовірніше виграти три партії з чотирьох; б) ймовірно виграти не менше п'яти з восьми партій.

Приклад 13. Кількість вантажних автомобілів, які проїдуть по шосе вздовж бензозаправки, відноситься до числа легкових як $3:2$.

Відомо, що в середньому одна з 30 вантажних машин і 2 з 50 легкових заправляються на цій бензозаправці. Знайти ймовірність того, що:

а) до бензоколонки під'їхав для заправлення вантажний автомобіль;

б) під'їхав для заправлення легковий автомобіль;

в) машина, що під'їхала до бензоколонки, буде заправлятися.

Розв'язання. Нехай по трасі їдуть $3x$ вантажних машин і $2x$ легкових машин, тоді по трасі їдуть $5x$ машин.

а) Статистична частота проїзду вантажних машин $P_N\{A_1\}=\frac{3x}{5x}=\frac{3}{5}$; $P_N\{A_1\}\approx P(A_1)$, де $P(A_1)$ — ймовірність проїзду вантажної машини, при цьому тільки $\frac{1}{30}$ заправляється, тому ймовірність заправлення вантажної машини $P(A_1^1)=\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{30}=\frac{1}{50}=0{,}02$;

б) аналогічно статистична частота проїзду легкових машин $P_N\{A_2\}=\frac{2x}{5x}=\frac{2}{5}$; $P_N\{A_2\}\approx P(A_2)$, де $P(A_2)$ — ймовірність проїзду легкової машини, при цьому заправляються $\frac{2}{50}$ від усіх машин, тому ймовірність заправлення легкової машини $P(A_2^1)=\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{50}=\frac{2}{125}=0{,}016$;

в) $P(C)=P(A_1^1)+P(A_2^1)=0{,}02+0{,}016=0{,}036$.

Відповідь: а) 0,02; б) 0,016; в) 0,036.

Приклад 14. Під час виборів президента в країні X було проведене вибіркове опитування виборців «Exit poll». За результатами опитування 10 000 виборців виявилося, що 900 виборців віддали свій голос претендентові C. Яка ймовірна кількість виборців проголосує за C, якщо до списків виборців внесено 36 млн осіб?

Розв'язання. Статистична частота події $P_N\{A\}=\frac{900}{10\,000}=$ $=\frac{9}{100}$. За теоремою Бернуллі $P(A)\approx P_N\{A\}$, тобто $P(A)\approx\frac{9}{100}$; $P(A)=\frac{n}{36\cdot 10^6}$, де n — ймовірне число виборців, які проголосували за C.

$\frac{n}{36\cdot 10^6}\approx\frac{9}{100}$; $n\approx\frac{36\cdot 10^6\cdot 9}{100}=324\cdot 10^4=3\,240\,000$, що відповідає 9% від числа виборців.

Відповідь: 3 240 000.

Задачі для самостійного розв'язування

1. Стрілок при стрільбі по мішені може влучити в «десятку» з імовірністю $\frac{1}{3}$, у «дев'ятку» — з імовірністю 0,2, а у «вісімку» — з імовірністю 0,35. Знайдіть імовірність того, що з одного пострілу стрілок виб'є більше 8 очок.

2. Завод випускає продукції вищого ґатунку 26%, першого ґатунку — 60%, другого — 10%. Знайдіть імовірність того, що взятий навмання виріб не буде ані вищого, ані першого ґатунку.

3. Імовірність того, що учні напишуть контрольну роботу, що має відбутися, на 4—6 балів дорівнює 20%, на 7—8 балів — $\frac{3}{7}$, на 9 балів — $\frac{3}{35}$, а на 10—12 балів — $\frac{1}{7}$. Знайдіть імовірність того, що:

а) клас не упорається з роботою;

б) оцінки за роботу будуть не менші за 7 балів.

4. Пасажир перебуває на зупинці, де зупиняються 4 маршрути автобусів, 3 маршрути тролейбусів і 5 маршрутів маршрутних таксі. Пасажира влаштовують маршрути всіх видів транспорту за одним номером. Вважаючи, що всі види транспорту ходять із однаковим інтервалом, знайдіть імовірність того, що перший транспорт, який під'їхав, буде потрібного напрямку.

5. Робітник працює на токарському верстаті. Імовірність того, що за зміну він не виготовить жодної нестандартної деталі, дорівнює $\frac{5}{6}$. Яка ймовірність того, що будуть стандартними всі деталі, виготовлені ним за 3 дні?

6. Імовірність того, що учень A розв'яже задачу з теорії ймовірностей, дорівнює 0,5, а учень B — 0,7. Знайдіть імовірність того, що задачу буде розв'язано хоча б одним із цих учнів.

7. У локальній мережі міститься певна кількість комп'ютерів. Імовірність того, що протягом години перший комп'ютер звернеться до сервера, дорівнює 0,9, ймовірність звернення другого комп'ютера — 0,8 і третього комп'ютера — 0,85.

Знайдіть імовірність того, що:
1) жоден комп'ютер протягом години не звернеться до сервера;
2) хоча б один із комп'ютерів протягом години звернеться до сервера.

8. У ящику з яблуками ймовірність виявити неспіле яблуко дорівнює 0,2, а червиве яблуко — 0,05. Яка ймовірність того, що взяте навмання яблуко буде неспілим і червивим?

9. У таджицькій родині 12 дітей. Вважаючи народження хлопчика або дівчинки подією рівноймовірною, обчисліть імовірність того, що в родині 6 хлопчиків.

10. Імовірність того, що витрачання електрики не перевищить норму протягом тижня, дорівнює $\frac{3}{4}$. Знайдіть імовірність того, що в найближчі 6 тижнів витрачання електрики залишиться в межах норми.

11. У країні під час виборів президента було проведено вибіркове опитування виборців. За результатами опитування близько 4000 виборців виявилося, що 1500 із них віддали свій голос претендентові A. Яка ймовірна кількість виборців проголосує за A, якщо до списків виборців внесено 2 млн 600 тис. осіб? Чи знадобиться другий тур виборів, якщо для перемоги в першому турі треба набрати 50% голосів плюс один голос?

12. Знайдіть імовірність того, що в книзі, яка складається з 300 сторінок, не буде жодної помилки, якщо ймовірність помилки дорівнює $0,2\%$ на одну сторінку тексту.

Самостійна робота 2

(Незалежні випробування. Формула Бернуллі. Закон великих чисел)

I варіант (з розв'язаннями)

У завданнях 1—2 виберіть одну правильну, на вашу думку, відповідь.

1. Стрілець влучає в «десятку» з імовірністю 0,1; у «дев'ятку» — з імовірністю 0,3, а у «вісімку» — з імовірністю 0,5. Зроблено один постріл. Яка ймовірність того, що вибито більше восьми очок?

А	Б	В	Г	Д
0,1	0,3	0,4	0,5	0,9

Розв'язання. Більше восьми очок — це 10 очок — подія *A*, імовірність якої $P(A)=0{,}1$, і 9 очок — подія *B*, імовірність якої $P(B)=0{,}3$, тоді $P(A+B)=P(A)+P(B)=0{,}1+0{,}3=0{,}4$.

Відповідь: В.

2. Кидають дві монети. Яка ймовірність появи хоча б одного герба?

А	Б	В	Г	Д
$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

Розв'язання. Можливі такі результати: $(Г\,Г)$, $(Г\,Ц)$, $(Ц\,Г)$, $(Ц\,Ц)$. Жодного герба немає в єдиному випадку — $(Ц\,Ц)$. Ймовірність такої події — $\frac{1}{4}$, тому ймовірність появи хоча б одного герба (подія *A*) $P(A)=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$.

Відповідь: *A*.

3. Кидають дві гральні кісточки. Яка ймовірність появи на першій кісточці непарного числа очок і на другій — 3 очок?

Розв'язання. Нехай подія *A* — поява на першій кісточці непарного числа очок, подія *B* — поява на другій кісточці 3 очок. На першій кісточці можуть випасти парні числа 2, 4, 6 або непарні 1, 3, 5, тому поява парного або непарного числа рівноймовірна і дорівнює $P(A)=\frac{1}{2}$. На другій кісточці ймовірність випадання 3 дорівнює $P(B)=\frac{1}{6}$.

Події *A* і *B* незалежні, тому $P(AB)=P(A)P(B)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{12}$.

4. Три стрільці незалежно один від одного стріляють по цілі. Ймовірність влучення для першого стрільця дорівнює 0,8, для другого — 0,75, для третього — 0,7. Кожен робить по одному пострілу. Яка ймовірність:

а) хоча б одного влучання;

б) рівно одного влучання?

Розв'язання

а) Перший стрілець влучає (подія A) з імовірністю $P(A)=0,8$, а не влучає з імовірністю $P(\bar{A})=1-0,8=0,2$; другий (подія B) — $P(B)=0,75$, а $P(\bar{B})=1-0,75=0,25$; третій (подія C) — $P(C)=0,7$, а $P(\bar{C})=1-0,7=0,3$. Імовірністю події E — жодного влучення — є $P(E)=$ $P(E)=P(\bar{A})P(\bar{B})P(\bar{C})=0,2\cdot 0,25\cdot 0,3$, а отже, ймовірність хоча б одного влучення $1-0,2\cdot 0,25\cdot 0,3=0,985$;

б) рівно одне влучення (подія D) — це коли влучає один із трьох стрільців, а два інші не влучають, тобто $D=A\bar{B}\bar{C}+$ $+\bar{A}B\bar{C}+\bar{A}\bar{B}C$, тоді $P(D)=0,8\cdot 0,25\cdot 0,3+0,2\cdot 0,75\cdot 0,3+$ $+0,2\cdot 0,25\cdot 0,7=0,06+0,045+0,035=0,14$.

5. Яка ймовірність того, що при шести киданнях гральної кісточки 5 очок випаде рівно 2 рази?

Розв'язання. Ймовірність випадання 5 очок при киданні гральної кісточки $p=\frac{1}{6}$, а невипадання — $q=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$. $n=6$, $m=2$, тоді за формулою Бернуллі $P_{m;n}=C_n^m p^m q^{n-m}$, одержимо

$$P_{2;6}=C_6^2\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^{6-2}=\frac{6\cdot 5}{2}\cdot\frac{1}{6^2}\cdot\frac{5^4}{6^4}=\frac{5^5}{2\cdot 6^5}.$$

6. Із 1000 довільно обраних деталей 6 бракуються. Скільки бракованих деталей (приблизно) опиниться серед 8300 деталей?

Розв'язання. Позначимо події: A — навмання обрана деталь бракована, тоді частота події A: $P\{A\}=\frac{6}{1000}$.

Серед 8300 деталей x бракованих, а отже, $P(A)=\frac{x}{8300}$.

Для достатньо великих чисел $P\{A\}\approx P(A)$, тобто $\frac{x}{8300}\approx\frac{6}{1000}$;

$$x\approx\frac{3\cdot 83}{5}\approx 50.$$

II варіант

У завданнях 1—2 виберіть одну правильну, на вашу думку, відповідь.

1. Стрілець влучає в «десятку» з імовірністю 0,08, у «дев'ятку» — з імовірністю 0,22, у «вісімку» — з імовірністю 0,4.

Зроблено один постріл. Яка ймовірність того, що вибито не менше 8 очок?

А	Б	В	Г	Д
0,7	0,3	0,62	0,48	1

2. Кидають дві монети. Яка ймовірність появи хоча б однієї цифри?

А	Б	В	Г	Д
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$

3. Кидають дві гральні кісточки. Яка ймовірність появи на першій кісточці точного квадрата натурального числа і на другій — 1 очка?

4. Три стрільці незалежно один від одного стріляють по цілі. Ймовірність влучення для першого стрільця дорівнює 0,8, для другого — 0,75, для третього — 0,7. Кожен робить по одному пострілу. Яка ймовірність:

а) рівно двох влучень;

б) жодного влучення?

5. Яка ймовірність того, що при семи киданнях гральної кісточки два очка випаде рівно 3 рази?

6. Із 5000 лотерейних квитків 5 виграшних. Скільки (приблизно) виграшних квитків може виявитися в 7800 лотерейних квитках?

III варіант

У завданнях 1—2 виберіть одну правильну, на вашу думку, відповідь.

1. Стрілець влучає в «десятку» з імовірністю 0,11, у «дев'ятку» — з імовірністю 0,24, у «вісімку» — з імовірністю 0,3, у «сімку» — з імовірністю 0,31. Яка ймовірність того, що вибито не більше 9 очок, якщо було зроблено один постріл?

А	Б	В	Г	Д
0,11	0,35	0,54	0,85	0,61

2. Кидають три монети. Яка ймовірність появи хоча б однієї цифри?

А	Б	В	Г	Д
$\frac{7}{8}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{8}$

3. Кидають дві гральні кісточки. Яка ймовірність появи на першій кісточці непарного числа, а на другій — або 5, або 6 очок?

4. Три стрільці незалежно один від одного стріляють по цілі. Ймовірність влучення для першого стрільця дорівнює 0,9, для другого — 0,85, а для третього — 0,7. Кожен робить по одному пострілу. Яка ймовірність:

а) хоча б одного влучення;

б) трьох влучень?

5. Робітник обслуговує 12 однакових верстатів. Імовірність того, що протягом однієї години верстат вимагатиме регулювання, дорівнює $\frac{1}{3}$. Яка ймовірність того, що протягом години робітникові доведеться регулювати 4 верстати?

6. Із 500 довільно обраних деталей 3 бракуються. Скільки бракованих виявиться серед 8000 деталей (приблизно)?

Контрольна робота

I варіант

У завданнях 1—5 виберіть одну правильну, на вашу думку, відповідь.

1. П’ять учнів обчислювали ймовірність певної події. Результати їхніх обчислень наведені в таблиці. Хто з них не помилився?

А	Б	В	Г	Д
10^6	–1	1,3	0,3	–0,1

2. Знайдіть суму ймовірностей протилежних подій $P(A)+$ $+P(\bar{A})$.

А	Б	В	Г	Д
1	0	$\frac{1}{2}$	-1	Інша відповідь

3. На картках написані числа з множини {1; 2; ...; 11}. Яка ймовірність того, що на першій навмання витягнутій картці буде написане парне число?

А	Б	В	Г	Д
1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{6}{11}$	$\frac{5}{11}$

4. Яка ймовірність із колоди в 36 карт витягти шістку будь-якої масті з першої спроби?

А	Б	В	Г	Д
$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$

5. Нехай події A_1 і A_2 незалежні, а подія A полягає в тому, що здійснюється хоча б одна з них — або A_1, або A_2. Тоді $P(A)$ обчислюється за формулою:

А	$P(A)=P(A_1)P(A_2)$
Б	$P(A)=1-P(A_1)-P(A_2)$
В	$P(A)=1-P(A_1)P(A_2)$
Г	$P(A)=1-(1-P(A_1)(1-P(A_2)))$
Д	$P(A)=P(\bar{A}_1)\cdot P(\bar{A}_2)$

6. У 25 тестових задачах зовнішнього незалежного оцінювання є по 5 відповідей на кожне завдання. Припускаючи, що правильні відповіді розкидані рівномірно, обчисліть імовірність потрапляння на потрібну відповідь за умови, що учень не має уявлення про даний предмет і обводить у всіх задачах літеру А.

7. Цех випускає $17\,\%$ продукції вищого ґатунку, 60% продукції першого ґатунку, 20% продукції другого ґатунку і 3% браку. Яка ймовірність того, що витягнутий навмання виріб буде першого або другого ґатунку?

8. На іспит із теорії ймовірностей винесено 50 запитань, розбитих на білети по 4 запитання в кожному. Учень вивчив рівно половину матеріалу. Яка ймовірність того, що він знає матеріал білета, який дістався йому?

9. Три спортсмени стріляють по одному разу по одній і тій самій цілі незалежно один від одного. Ймовірності їх влучення в ціль 0,5; 0,6 і 0,7. Яка ймовірність того, що хоча б один постріл влучить у ціль?

10. Яка ймовірність того, що при семи підкиданнях гральної кісточки п'ятірка випадає рівно два рази?

11. Із групи, що складається з 6 чоловіків і 4 жінок, підбирається команда із 6 осіб. Яка ймовірність того, що в команді опиниться не більше двох жінок?

II варіант

У завданнях 1—5 виберіть одну правильну, на вашу думку, відповідь.

1. П'ять учнів обчислили ймовірність певної події. Результати їхніх обчислень наведені в таблиці. Хто з них не помилився?

А	Б	В	Г	Д
$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{7}{6}$	$-\frac{7}{6}$	$1\frac{1}{10}$

2. Імовірність події $P(A)=\frac{2}{7}$. Чому дорівнює ймовірність $P(\bar{A})$?

А	Б	В	Г	Д
$\frac{2}{7}$	$-\frac{5}{7}$	$\frac{9}{7}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{10}{49}$

3. На картках написані числа з множини $\{1, 2, \ldots, 11\}$.

Яка ймовірність того, що на першій навмання витягненій картці буде непарне число?

А	Б	В	Г	Д
$\frac{5}{11}$	$\frac{6}{11}$	1	0	$\frac{1}{2}$

4. Яка ймовірність із преферансної колоди у 32 карти витягти короля будь-якої масті з першої спроби?

А	Б	В	Г	Д
$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{6}{32}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{6}$

5. Укажіть формулу Бернуллі з п'яти наведених формул.

А	Б	В	Г	Д
$C_n^m p^m q^{n-m}$	$C_n^m p^{n-m} q^m$	$p^m q^{n-m}$	$\frac{m}{n}$	$1-(1-p)^n$

6. Телевізійний приймач приймає 65 каналів. Напередодні Нового року п'ять із цих каналів демонстрували кінофільм «Іронія долі, або З легкою парою». Яка ймовірність при випадковому ввімкнені телевізора потрапити на зазначений фільм?

7. Кондитерський цех випускає 38% гіркого шоколаду, 43% молочного шоколаду, 10% білого шоколаду та 9% солодкої плитки. Яка ймовірність того, що перший вийнятий навмання виріб виявиться білим або молочним шоколадом?

8. На іспит із певного предмету винесено 90 запитань, розбитих на білети по три запитання в кожному. Учень вивчив 50 запитань. Яка ймовірність, що він знає всі запитання білета, який дістався йому?

9. Три спортсмени стріляють по одному разу по одній і тій самій цілі незалежно один від одного. Ймовірності їхнього влучення в ціль 0,2; 0,3 і 0,5. Яка ймовірність того, що хоча б один постріл влучить у ціль?

10. Яка ймовірність того, що при шести підкиданнях гральної кісточки трійка випаде рівно 3 рази?

11. Із групи, що складається із 6 чоловіків і 4 жінок, підбирається команда з 5 осіб. Яка ймовірність того, що в команді опиниться більше двох жінок?